UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

REDE NACIONAL - PROFMAT

ELIANA TELES PORTELA

APRENDENDO POR MEIO DA ANÁLISE DE ERROS: UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE AS OPERAÇÕES COM FRAÇÕES NO ESTUDO DA FUNÇÃO AFIM

ITABAIANA

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

ELIANA TELES PORTELA

APRENDENDO POR MEIO DA ANÁLISE DE ERROS: UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE AS OPERAÇÕES COM FRAÇÕES NO ESTUDO DA FUNÇÃO AFIM

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Professora Ma. Viviane de Jesus Lisboa Aquino.

ITABAIANA

2018

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

P843a

Portela, Eliana Teles

Aprendendo por meio da análise de erros: uma investigação sobre as operações com frações no estudo da função afim / Eliana Teles Portela ; orientador Viviane de Jesus Lisboa Aquino. - Itabaiana, 2018.

61 f. : il.

Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2018.

1. Matemática. 2. Funções (Matemática). 3. Matemática – Estudo e ensino – Análise de erros. 4. Ensino - Metodologia. 4. Frações. I. Aquino, Viviane de Jesus Lisboa orient. II. Título.

CDU 517.5:37

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprendendo por Meio da Análise de Erros: Uma Investigação Sobre as Operações com Frações numa Função Afim

por

Eliana Teles Portela

Aprovada pela banca examinadora:

Viviane de Jesus Lisboa Aquino
Prof.ª Ma. Viviane de Jesus Lisboa Aquino - UFS
Orientador

Samuel Brito Silva
Prof. Dr. Samuel Brito Silva - UFS
Primeiro Examinador

TCEtcheverria
Prof.ª Dr.ª Teresa Cristina Etcheverria - UFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 30 de Outubro de 2018

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Cristóvão. Tel. (00 55 79) 3194-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais, a minha filha Helena e a minha sobrinha afilhada Maria Luiza pela existência deles em minha vida. Ao meu esposo pelo incentivo para realização deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, inicialmente, por ouvir minhas preces e derramar sobre mim a inspiração e a sabedoria que necessitei durante o Mestrado, principalmente durante a produção desta dissertação. Agradeço também a Ele pela oportunidade de ter conhecido pessoas tão especiais nesses anos de curso.

Aos meus pais, Antônio e Josefa, por serem meu porto seguro em todas as etapas da minha vida.

A minha filha Helena, por ser luz na minha vida e uma menina tão abençoada. Um ser tão inocente e capaz de dar tanta força pra mamãe escrever a dissertação.

Ao meu esposo Kaká, por ser companheiro e por acreditar em minha capacidade.

Aos meus irmãos queridos por torcerem pelo meu sucesso.

Aos meus amigos Elisangela, Rokenedy e Rogério pelo apoio nos momentos que mais precisei. Mas não posso deixar de agradecer de forma especial a Elisangela e Rokenedy que sempre estavam dispostos a tirar minhas dúvidas sempre que precisava.

Aos meus colegas de turma do PROFMAT, por todas as colaborações e experiências partilhadas.

A todos os professores deste curso pela riqueza infindável de conhecimentos compartilhados, em especial a Viviane, pela orientação dedicada a mim, com suas sábias palavras e com seu jeito acolhedor, além de possuir generosidade e humildade imensuráveis.

E, finalmente, a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001 pela bolsa e pelo financiamento do PROFMAT.

Resumo

Este trabalho se propõe a investigar quais são as dificuldades apresentadas pelos estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental em atividades que envolvem as operações com frações aplicadas numa função afim. O estudo está fundamentado numa abordagem qualitativa e na ideia de que a análise da produção escrita dos alunos pode ser trabalhada como metodologia de ensino (CURY, 2008). A coleta de dados foi realizada por meio de três questionários e uma Atividade de Análise do Erro aplicados aos alunos de uma escola do interior do estado de Sergipe. Foi feita uma segunda abordagem em torno da análise de erro como metodologia de ensino, ao apresentar e discutir com os estudantes os erros cometidos por eles no Questionário 1, procurando fazer com que eles entendam o raciocínio que os levou a cometer tais erros e, dessa forma, superarem suas dificuldades, o que foi analisado nos questionários seguintes.

Palavras-chave: Análise de erros. Metodologia de Ensino. Operações com frações.

Abstract

This paper proposes to investigate the difficulties presented by the students of the 9th year of elementary school in activities that involve the operations with fractions applied in a related function. The study is based on a qualitative approach and the idea that the analysis of students' written production can be worked as a teaching methodology (CURY, 2008). Data collection was performed through three questionnaires and a review activity applied to the students of a school in the interior of the state of Sergipe. A second approach was made around error analysis as a teaching methodology, by presenting and discussing with students the mistakes made by them in Questionnaire 1, trying to make them understand the reasoning that led them to make such mistakes, and from this overcome their difficulties, which was analyzed in the following questionnaires.

Keywords: Error analysis. Teaching Methodology. Operations with fractions.

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

Sumário

INTRODUÇÃO

A Matemática é uma disciplina que se relaciona com as mais variadas áreas do conhecimento, tornando-se imprescindível em nossas vidas. Seu ensino é alvo de debates nos mais diversos níveis escolares, especialmente no que diz respeito à Educação Básica. Ao longo de mais de dezenove anos atuando nesse nível de ensino, observa-se a dificuldade demonstrada pela maioria dos estudantes para aprender as operações com frações.

Através das observações feitas em sala de aula, nota-se que o grau de dificuldade existente na disciplina é enorme, pois muitos alunos não compreendem os conteúdos que lhes são transmitidos e acabam desistindo de estudar.

Sendo assim, busca-se com este estudo de caráter qualitativo verificar se discentes do 9º ano do Ensino Fundamental conseguem realizar as operações com números racionais corretamente e, a partir das falhas detectadas, fazer o estudo da análise de erros cometidos por esses estudantes, para em seguida fazer uma investigação das possíveis causas que os levaram a cometer tais erros, além de averiguar quais contribuições o uso da análise de erros, como metodologia de ensino, traz para o ensino e a aprendizagem da Matemática na Educação Básica.

Além disso, este trabalho foi desenvolvido considerando-se que a identificação e a análise dos erros cometidos pelos alunos constituem uma ferramenta importante e eficiente para auxiliar o professor a promover mudanças significativas no processo de ensino-aprendizagem da disciplina.

Entende-se que a análise dos erros pode permitir que os estudantes façam uma reflexão sobre o que pensam acerca de determinado assunto, para perceber que a partir delas também se pode aprender e favorecer uma prática educativa que proporciona aprendizagens tanto aos estudantes quanto aos professores. Para que isso ocorra, é importante que em sala de aula o aluno seja incentivado e tenha a oportunidade de realizar tentativas, sabendo que elas, “corretas ou não”, promovem uma aprendizagem significativa.

Diante dessas constatações, preparamos as seguintes questões de pesquisa:

- Quais os erros mais frequentes na resolução de exercícios envolvendo as operações com frações?
- Após uma revisão do Questionário 1, baseada na análise de erros como metodologia de ensino, houve melhora no desempenho dos estudantes nos questionários seguintes?

No Capítulo 1, encontram-se os conteúdos matemáticos relacionados ao estudo. O Capítulo 2 contém as estruturas da pesquisa e o embasamento teórico, é constituído pelos objetivos da pesquisa, problemas da pesquisa, metodologia da pesquisa, referencial teórico e o desenvolvimento, identificando os sujeitos envolvidos. O Capitulo 3 abrange a discussão dos resultados da pesquisa sob a perspectiva da análise de erros (CURY, 1994). Para coleta de dados, foram aplicados três questionários a 18 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental numa escola regular da Rede Pública Estadual do interior do estado de Sergipe. O Capítulo 4 faz a comparação do rendimento de cada aluno nos três questionários. Para finalizar, apresentamos as considerações finais e encaminhamentos.

Acredita-se que este trabalho contribua de forma significativa para que os professores façam uma reflexão quanto à visão dos erros no processo ensino-aprendizagem, mostrando como as respostas dos alunos, ainda que incorretas, podem ser consideradas fonte de aprendizagem, viabilizando um caminho de descobertas e desafios que estimulará no educando o prazer do saber e do fazer.

CAPÍTULO 1: CONTEÚDOS RELACIONADOS AO ESTUDO

Neste capítulo abordamos os conteúdos utilizados nos questionários da pesquisa. De início abordamos sobre os números racionais, o máximo divisor comum entre dois números inteiros, mínimo múltiplo comum, as operações com números racionais e na sequência função polinomial do 1º grau. Na construção desse capítulo, tomamos como referência os livros de HEFEZ, Abramo. Aritmética. Rio de Janeiro: SBM, 2014. (Coleção PROFMAT) e Fundamentos de Matemática Elementar. São Paulo, Atual: 1997.

1.1 Números Racionais

No conjunto dos números inteiros (denotado por $\mathbb{Z}$) não podemos definir a operação de divisão, pois dado um número inteiro $q \neq 1$ e -1, o inverso de q não existe em $\mathbb{Z}$: $\frac{1}{q} \notin \mathbb{Z}$. Para superar esta dificuldade introduzimos os números racionais.

Chama-se conjunto dos números racionais (denotado por $\mathbb{Q}$) o conjunto dos pares ordenados (ou frações) $\frac{a}{b}$, onde $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, para os quais adotam-se as seguintes definições:

- igualdade: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$

- adição: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

- multiplicação: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

Consideremos o conjunto $\mathbb{Q}'$ formado pelos números racionais com denominador unitário: $\mathbb{Q}' = \left\{\frac{x}{1};\ x \in \mathbb{Z}\right\}$. Temos:

- $\frac{a}{1} = \frac{b}{1} \Leftrightarrow a = b$

- $\frac{a}{1} + \frac{b}{1} = \frac{a+b}{1} \Leftrightarrow a + b = a + b$

- $\frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \frac{a \cdot b}{1} \Leftrightarrow a \cdot b = a.b$

Com isso os racionais com denominador igual a 1 comportam-se para a igualdade, a adição e a multiplicação como se fossem números inteiros. Assim, fazendo o racional $\frac{x}{1}$ coincidir com o número x, decorre que:

$$\mathbb{Q}' = \mathbb{Z}, \text{ logo } \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Notemos finalmente que todo número racional $\frac{a}{b}$ pode ser representado por um número decimal.

1.2 Máximo Divisor Comum (MDC)

Sejam dados dois inteiros a e b, distintos ou não. Um número inteiro d será dito um divisor comum de a e b se $d|a$ e $d|b$.

Os números $\pm 1, \pm 2$ e ± 5 são os divisores comuns de 10 e 20.

Definição 1.1. Sejam a, b $\in \mathbb{Z}$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Diz-se que $d \in \mathbb{N}$ é um máximo divisor comum (m.d.c.) entre a e b quando as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $d|a$ e $d|b$;

(ii) Se $c|a$ e $c|b$, então $c|d$.

Denotamos por (a, b) o mdc entre os números a e b. Em outras palavras, um máximo divisor comum de a e b é um número natural que os divide e é divisível por todo divisor comum de (a, b).

Como o m.d.c. de a e b não depende da ordem em que a e b são tomados, temos que $(a, b) = (b, a)$.

Observe que dados a, $b \in \mathbb{Z}$, caso exista o mdc (a, b) de a e b, então $(a, b) = (-a, b) = (a, -b) = (-a, -b)$. Assim para calcular o m.d.c. de dois números a e b vamos considera-los positivos.

Para provar a existência do máximo divisor comum de dois inteiros positivos, Euclides utilizou, o resultado abaixo.

Lema 1.2. sejam $a, b, n \in \mathbb{Z}$. Se existe $(a, b - na)$, então, (a, b) existe e $(a, b) = (a, b - na)$.

Demonstração no livro texto HEFEZ, Abramo. Aritmética. Rio de Janeiro: SBM, 2014. (Coleção PROFMAT), página 88.

Teorema 1.3. Para todo a, $b \in \mathbb{N}$, existe único $d = (a, b)$. Além disso, existem x_0, $y_0 \in \mathbb{Z}$, tais que $d = ax_0 + by_0$.

Demonstração. Considere o conjunto $W = \{ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z} \ e \ ax + by > 0\}$. Note que $W \neq \emptyset$, pois $0 < a + b = a \cdot 1 + b \cdot 1 \in W$.

Desse modo, pelo PBO, W possui menor elemento d. Vamos mostrar que $d = (a, b)$.

Como $d \in W$ existem x_0 e $y_0 \in \mathbb{Z}$, tais que $d = ax_0 + by_0$. (1)

Usando o algoritmo da divisão com os elementos a e d, temos $a = dq + r$, com $0 \leq r < d$. (2).

Substituindo (1) em (2), segue que

$$r = a - dq = a - (ax_0 + by_0)q = a - ax_0q - by_0q = a(1 - qx_0) + b(-qy_0) \geq 0.$$

Mas, pela minimalidade de d, $r \notin W$, logo $r = 0$, isto é, $a = dq$, o que mostra que $d|a$. De modo análogo prova-se que $d|b$.

Agora, se $c \in \mathbb{Z}$ e tal que $c|a$ e $c|b$, então existem λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $a = c\lambda_1$ e que $b = c\lambda_2$.

Substituindo em (1), temos:

$$d = (c\lambda_1)x_0 + (c\lambda_2)y_0 = c(\lambda_1 x_0 + \lambda_2 y_0), \text{ ou seja } c|d.$$

Portanto $d = (a, b)$.

(Unicidade) Suponhamos que existe d' tal que $d' = (a, b)$. Assim, existem x_1 e y_1 tais que

$$ax_1 + by_1 = d'.$$

Por outro lado, temos que $a = x_0 d$ e $b = y_0 d$, com x_0, $y_0 \in \mathbb{Z}$. Portanto,

$$d' = x_0 d x_1 + y_0 d y_1 = d(x_0 x_1 + y_0 y_1),$$

o que implica $d|d'$. Logo, $d \leq d'$. Como $d < d'$ é um absurdo, uma vez que d é o máximo divisor comum de a e b, concluímos que $d = d'$. ∎

A expressão $d = ax + by$ é conhecida como Identidade de Bézout para os elementos de a e b.

O máximo divisor comum satisfaz as seguintes propriedades:

Propriedade 1.4. Dados $a, b, n \in \mathbb{Z}$, temos que:

(i) $(a, b) = (a, b - na)$;
(ii) $(a, a) = |a|$;
(iii) $(a, 0) = |a|$;
(iv) $(a, 1) = 1$.

Dois números inteiros a e b são ditos primos entre si, ou relativamente primos quando o $(a, b) = 1$. Por exemplo, 8 e 3 são primos entre si, pois $(3,8) = 1$.

Proposição 1.5. Dois números inteiros a e b são primos entre si se, e somente se, existem números inteiros m e n tais que $ma + nb = 1$.

Demonstração. Suponha que a e b são primos entre si. Logo $(a, b) = 1$. Pela identidade de Bézout existem números m e n tais que $ma + nb = (a, b) = 1$.

Reciprocamente, suponha que existam números inteiros m e n tais que $ma + nb = 1$. Se $d = (a, b)$, temos que $d|(ma + nb)$, ou seja $d|1$, e, portanto, $d = 1$. ■

Esta relação é usada para provar vários resultados, dentre eles o Lema de Gauss.

Teorema 1.6. (LEMA DE GAUSS). Sejam a, b e c números inteiros. Se $a|bc$ e $(a, b) = 1$, então $a|c$.

Demonstração no livro texto HEFEZ, Abramo. Aritmética. Rio de Janeiro: SBM, 2014. (Coleção PROFMAT), página 96.

Corolário 1.7. Dados a, b, $c \in \mathbb{Z}$, com b e c ambos não nulos, temos que

$$b|a \text{ e } c|a \Leftrightarrow \frac{bc}{(b,c)}|a.$$

Demonstração no livro texto HEFEZ, Abramo. Aritmética. Rio de Janeiro: SBM, 2014. (Coleção PROFMAT), página 97.

Podemos generalizar a noção de m.d.c. para três ou mais números inteiros.

Definição 1.8. Sejam $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ todos não nulos. Diz-se que $d \in \mathbb{N}$ é um máximo divisor comum (m.d.c.) entre $a_1, \dots, a_n$ quando as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $d|a_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.
(ii) Se $c|a_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, então $c|d$.

O m.d.c., quando existe, é único denotado conforme a seguir e determinado por recorrência

$$(a_1, \cdots, a_n) = \left(a_1, \cdots a_{n-2}, (a_{n-1}, a_n)\right).$$

1.3 Mínimo Múltiplo Comum (MMC)

Definição 1.9. Sejam a, $b \in \mathbb{Z}$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Diz-se que $m \in \mathbb{N}$ é um mínimo múltiplo comum (m.m.c.) entre a e b quando as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $a|m$ e $b|m$;
(ii) Se $a|c$ e $b|c$, então $m|c$

Denotamos por $[a, b]$ o mínimo múltiplo comum entre os números a e b. Caso exista $[a, b]$ é fácil mostrar que $[a, b] = [-a, b] = [-a, -b] = [a, -b]$.

Por conta da igualdade anterior vamos considerar a e b positivos.

É também fácil verificar que $[a, b] = 0$ se, e somente se, $a = 0$ ou $b = 0$.

De fato, se $[a, b] = 0$, então 0 divide ab, que é múltiplo de a e de b. Logo $ab = 0$ e, portanto, $a = 0$ ou $b = 0$. Reciprocamente, $a = 0$ ou $b = 0$, então 0 é o único múltiplo comum de a e de b. Assim, $[a, b] = 0$.

Teorema 1.10. Sejam a, $b \in \mathbb{N}$ e $d = (a, b)$. Então, existe $m = [a, b] = \frac{ab}{d}$.

Demonstração. Consideremos $m = \frac{ab}{d}$ e provemos que $m = [a, b]$.

Como $d|a$ e $d|b$, então $a = d\lambda_1$ e $d\lambda_2$ com c e $\lambda_2 \in \mathbb{N}$, temos $m = \frac{ab}{d} = \frac{\lambda_1 db}{d} = \lambda_1 b \Rightarrow b|m$. Do mesmo modo, $a|m$.

Tomemos agora m_1 outro múltiplo comum de a e b, logo $m_1 = \alpha_1 a$ e $m_1 = \alpha_2 b$, com α_1 e $\alpha_2 \in \mathbb{N}$. Pela Identidade de Bézout existem inteiros x e y tais que $d = ax + by$.

Assim,

$$\frac{m_1}{m} = \frac{m_1 d}{md} = \frac{m_{1(ax+by)}}{ab} = \frac{m_1 ax + m_1 by}{ab} =$$

$$\frac{\alpha_2 bax + \alpha_1 aby}{ab} = \alpha_2 x + \alpha_1 y \in \mathbb{Z},$$

ou seja, $m|m_1$.

Portanto, $m = [a, b]$. ■

Podemos também generalizar a noção de m.m.c., conforme a seguir:

Definição 1.11. Sejam $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ todos não nulos. Diz-se que $m \in \mathbb{N}$ é um mínimo múltiplo comum (m.m.c.) entre $a_1, \ldots, a_n$ quando as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $a_i|m$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$;

(ii) Se $a_i|c$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, então $m|c$.

1.4 Operações com Números Racionais

Definição 1.12. Sejam $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{r}{s}$ elementos de $\mathbb{Q}$. Chama-se soma de a com b e indica – se por $a + b$ o elemento de $\mathbb{Q}$ definido da seguinte maneira:

$$a + b = \frac{m}{n} + \frac{r}{s} = \frac{m}{n} \cdot \frac{s}{s} + \frac{r}{s} \cdot \frac{n}{n} = \frac{ms}{ns} + \frac{rn}{sn} = \frac{ms+nr}{ns}.$$

Definição 1.13. Sejam $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{r}{s}$ elementos de $\mathbb{Q}$. Chama-se produto de a com b e indica – se por ab o elemento de $\mathbb{Q}$ definido da seguinte maneira:

$$a \cdot b = \frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s} = \frac{mr}{ns}.$$

A adição e a multiplicação de racionais apresentam as seguintes propriedades:

- Associatividade da adição:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$$

- Comutatividade da adição:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

- Existência do elemento neutro da adição:

$$\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a}{b}$$

- Existência do inverso aditivo:

$$\frac{a}{b} + \left(\frac{-a}{b}\right) = 0$$

- Associatividade da multiplicação:

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b}\left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)$$

- Comutatividade da multiplicação:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$$

- Existência do elemento neutro da multiplicação:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a}{b}$$

- Distributividade da multiplicação em relação à adição:

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$$

- Simétrico ou inverso para multiplicação:

$\forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{a}{b} \neq 0$, existe $\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ tal que:

$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$, $\forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{a}{b} \neq 0$

1.4 Função Polinomial do 1º Grau

Definição 1.14. Uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ recebe o nome de função polinomial do 1º grau quando para cada $x \in \mathbb{R}$ estiver associado o elemento $(ax + b) \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$, isto é:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto ax + b,\ \ a \neq 0.$$

Veja os exemplos a seguir:

a) $y = 4x + 1$, em que $a = 4$ e $b = 1$
b) $y = -2x + 3$, em que $a = -2$ e $b = 3$
c) $y = x - 2$, em que $a = 1$ e $b = -2$
d) $y = 2x$, em que $a = 2$ e $b = 0$

1.5.1 Valor de uma Função Polinomial do 1º Grau

O valor numérico de uma função polinomial do 1º grau $f(x) = ax + b$ para $x = x_0$ é dado por $f(x_0) = ax_0 + b$.

Na função $f(x) = 2x + 1$, podemos determinar:

a) $f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3$

b) $f(-4) = 2 \cdot (-4) + 1 = -8 + 1 = -7$

c) $f(x + h) = 2 \cdot (x + h) + 1 = 2x + 2h + 1$

CAPÍTULO 2: ESTRUTURA DA PESQUISA E REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Objetivos e problema de pesquisa

Esta pesquisa tem por objetivo analisar a aplicação dos números racionais no conteúdo de função afim para verificar se os discentes conseguem realizar corretamente as operações com números racionais e, a partir das falhas detectadas, fazer o estudo da análise de erros cometidos por esses estudantes para em seguida fazer uma investigação das possíveis causas que os levaram a cometer tais erros.

O desenvolvimento desta investigação, partiu do seguinte problema de pesquisa: Que tipos de erros são cometidos por alunos do 9° ano do Ensino Fundamental na resolução de operações com frações? Esse problema foi dividido nas seguintes questões:

- Quais os erros mais frequentes na resolução de exercícios envolvendo as operações com frações?
- Após uma revisão do Questionário 1, baseada na análise de erros como metodologia de ensino, houve melhora no desempenho dos estudantes nos questionários seguintes?

2.1.1 Metodologia de pesquisa

Esta pesquisa foi desenvolvida segundo a abordagem de natureza qualitativa, pois ela caracteriza-se pela observação do meio natural do indivíduo. Além disso, busca identificar, evidenciar e compreender as principais dificuldades dos alunos ao efetuar operações com frações.

A intenção principal deste trabalho consiste na compreensão das dificuldades dos alunos em relação aos erros cometidos em sala de aula. D' Ambrósio (2012) ressalta que a pesquisa qualitativa tem diversas nomenclaturas, mas em todas elas o "essencial é o mesmo: a pesquisa é focalizada no indivíduo, com toda sua complexidade, e na sua inserção e interação com o ambiente sociocultural e natural" (D' Ambrósio, 2012, p. 93). Para ilustrar a análise, foram utilizados dados quantitativos.

2.2 Referencial teórico

Neste trabalho, o erro identifica-se como um elemento construtivo e pode oferecer condições para uma prática pedagógica que seja mais comprometida com o processo de ensino-aprendizagem das crianças brasileiras.

Nessa perspectiva, Silva e Buriasco defendem a ideia de que:

> A atitude de analisar constantemente a produção escrita dos alunos contribui para que o professor possa refletir sobre planejamento, desenvolvimento e avaliação da sua prática pedagógica. Assim evidencia-se a relevância de uma prática avaliativa que se configure, não só, pela identificação de dificuldades, mas prioritariamente pelo reconhecimento da existência de conhecimento, tanto nos erros quanto nos acertos dos alunos. (2006, p. 3)

A dificuldade no ensino-aprendizado da Matemática tem sido um dos principais questionamentos nos últimos anos. Assim, tem-se discutido metodologias de ensino mais eficazes para aprendizagem dessa disciplina por parte dos alunos.

Nesse sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) destacam que:

> A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e

> destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos. (BRASIL, 1997, p. 19)

Inúmeros são os pesquisadores que vêm estudando as dificuldades e os erros cometidos por alunos. E para isso eles recorrem à pesquisa, à investigação e aos documentos oficiais brasileiros que falam das metodologias e maneiras de se trabalhar os conteúdos dessa disciplina.

A análise dos erros cometidos pelos alunos, quando abordada como metodologia de ensino, propicia aos educandos a investigação de problemas gerados por eles mesmos no ambiente escolar. Nessa perspectiva, observa-se que a análise de erros vai além de identificar as dificuldades dos alunos, ela possibilita a construção da aprendizagem.

> A análise das respostas, além de ser uma metodologia de pesquisa, pode ser, também, enfocada como uma metodologia de ensino, se for empregada em sala de aula, como "trampolim para a aprendizagem" (BORASI, 1985), partindo dos erros detectados e levando os alunos a questionar suas respostas, para construir o próprio conhecimento. (CURY, 2007, p. 15)

No processo de consolidação da aprendizagem, "errar" é apenas um passo dentre outros que são necessários na construção de um conhecimento que ainda não se sabe e pode contribuir para que o próprio aluno perceba como está seu desenvolvimento em Matemática, pois, segundo Pinto:

> O erro é apenas um sinal de passagem para o acerto, um sinal da presença de um obstáculo que será superado, sem medo e sem culpa. O erro é produtivo, um componente natural do sucesso escolar. (PINTO, 2000, p.137)

O erro do aluno é um saber que ele possui e pode ser considerado uma fonte de informação, proporcionando aprendizagens, e é necessário que o professor procure elaborar estratégias que levem os alunos a questionar suas próprias soluções. Silva e Buriasco (2005, p. 501) salientam que "as situações de erro também podem servir ao aluno como meio de reflexão sobre o que ele pensa a respeito de determinado assunto, para perceber que a partir delas também se pode aprender".

Dessa forma, a análise de erros também pode ser entendida como uma metodologia de ensino, favorecendo a aprendizagem e o desenvolvimento do aluno dentro do universo matemático, pois, através dela, o professor se torna mediador no processo de ensino e aprendizagem e auxilia o discente na construção do conhecimento.

O erro é uma tentativa de acerto do aluno e, se olhado dessa forma, pode ser utilizado como uma ferramenta na aprendizagem. Sobre essa perspectiva, os PCN (1997) dizem que:

> Na aprendizagem escolar o erro é inevitável e, muitas vezes, pode ser interpretado como um caminho para a busca do acerto. Quando o aluno ainda não sabe como acertar, faz tentativas, à sua maneira, construindo uma lógica própria para encontrar a solução. Ao procurar identificar, mediante a observação e ao diálogo, como o aluno está pensando, o professor obtém as pistas do que ele não estar compreendendo e pode planejar a intervenção adequada para auxiliar o aluno a refazer o caminho. (BRASIL, 1998, p.55)

Para ajudar o aluno na superação do erro, o professor desempenha um papel importante, pois, de acordo com as ideias de Pinto (2009), é papel do professor trabalhar com os erros de forma que eles se tornem ‘observáveis’ aos alunos. Para ele, “o termo ‘observável’ traz implícita a ideia de construção, isto é, algo que é observado a partir das relações que envolvem as transformações do objeto”.

A dinâmica da sala de aula poderia voltar-se para a criação de um ambiente em que um determinado erro seria usado para questionar os alunos a respeito de outras formas de resolução mais apropriadas. Essa proposta tem origem nas ideias de Borasi (1996), que acredita ser importante criar oportunidades para que os erros venham à tona, principalmente aqueles pertinentes a conhecimentos prévios que se tornam obstáculos na aprendizagem de novos conceitos matemáticos. A esse respeito, Brousseau também reconhece que há erros que se derivam de um conhecimento prévio, que impedem ou interferem na aquisição de um novo conhecimento.

Debater os erros com a turma e retomar as respostas incorretas possibilita ao docente provocar e estimular os alunos de maneira que eles possam explicar e dar sentido aos próprios erros, expressando suas dúvidas e procurando meios para sua superação. O erro é objeto de estudos e debates, pois, a partir dele, o aluno aprende e revela um conhecimento que possui, além de auxiliar o professor a conhecer o que ele não sabe a respeito de determinado assunto.

Segundo Cury:

> Se estamos interessados no processo de aprendizagem da Matemática, o erro pode ser visto como instrumento de identificação dos problemas do currículo e da metodologia, e, ao resolvê-los, os erros serão eliminados; se, no entanto, queremos explorar o erro, esse pode constituir-se em instrumento para a compreensão dos processos cognitivos. (CURY, 1995, p. 9-10)

A análise de erro é um ramo da pesquisa em Educação Matemática que vem crescendo, pois, a partir dele, pode-se aprender. O aluno que corrige um erro e o entende pode mudar sua aprendizagem e estimular seu raciocínio. Comparar erros desencadeia caminhos para a construção de novos saberes. Um erro corrigido pelo aluno pode ser mais proveitoso para ele, para o professor e para todo o grupo de estudantes, do que um acerto imediato. Nessa perspectiva, Costa salienta que:

> A análise do “erro” nos permite valorizar o processo subjacente às respostas, não apenas a resposta com um produto que se encerra em si mesmo. A análise dos processos utilizados pelas crianças nos leva a verificar o que há de positivo nela, a sua construção lógica, não apenas os seus supostos déficits. (COSTA,1988, p.16)

Outro ponto a se tratar é a ideia de que os erros podem mostrar conceitos ainda não atingidos pelo próprio aluno. Em algumas situações, os erros podem demonstrar que houve falha na aprendizagem. Sendo assim, torna-se indispensável que o professor crie alternativas para completar essa lacuna.

Cury diz que:

> Qualquer produção, seja aquela que apenas repete uma resolução-modelo, seja a que indica a criatividade do

> estudante, tem características que permitem detectar as maneiras como o aluno pensa e, mesmo, que influências ele traz de sua aprendizagem anterior, formal ou informal (CURY, 2008, p. 13)

É necessário que o professor veja o aluno como agente da construção do seu conhecimento e cabe a ele ajudá-lo a desenvolver sua autonomia, instigando-o a refletir, investigar e descobrir, criando na sala de aula um diálogo em que a troca de ideias seja valorizada para que, ao analisar o erro cometido pelo aluno, busque estratégias capazes de transformar o erro em aprendizagem. Quando o discente comete o erro, ele expressa de uma forma o que sabe e o que não sabe, revelando assim um conhecimento que possui.

Conforme Buriasco:

> Ao ter uma noção o mais precisa possível do que seus alunos sabem e são capazes de fazer, o professor pode, além de tomar decisões adequadas sobre sua prática escolar, contar com seus alunos como interlocutores na compreensão dos caminhos por eles percorridos na busca da resolução da situação; o que contribui para melhorar a aprendizagem, na medida em que favorece a continuidade dela e a progressiva autonomia do aluno. (BURIASCO, 2004, p. 247)

Com o intuito de fazer com que o erro contribua positivamente para a aprendizagem dos alunos, é necessário que o professor utilize metodologias variadas para auxiliar os estudantes a superar suas dificuldades e encará-lo como uma etapa da construção do conhecimento, pois, quando visto de modo construtivo pelo professor, o erro acaba colaborando para a boa autoestima do aluno, pois, a partir dele, o docente poderá refletir sobre sua prática de ensino e planejar suas aulas de tal forma que melhore ou facilite o processo ensino-aprendizagem. PERRENOUD salienta que o trabalho a partir dos erros poderá trazer uma nova perspectiva para a aprendizagem:

> A didática das disciplinas interessa-se cada vez mais pelos erros e tenta compreendê-los. Astolfi (1997) propõe que se considere o erro como uma ferramenta para ensinar, um revelador dos mecanismos de pensamento do aprendiz. Para desenvolver esta competência o professor deve, evidentemente, ter conhecimentos em didática e em psicologia cognitiva. De início, deve interessar-se pelos erros aceitando-os como etapas estimáveis do esforço de compreender, esforçar-se, não os corrigir ("Não diga, mas diga!"), proporcionando ao aprendiz, porém, os meios para tomar consciência deles, identificar sua origem e transpô-los. (2000, p. 32)

Analisar as causas de um erro não é tarefa fácil, principalmente porque é difícil interpretar o que o aluno pensa, o que, muitas vezes, não se mostra de forma clara na sua resolução. Sobre isso, os Parâmetros Curriculares Nacionais apontam:

> (...) quando o professor consegue identificar a causa do erro, ele planeja a intervenção adequada para auxiliar o aluno a avaliar o caminho percorrido. Se, por outro lado, todos os erros forem tratados da mesma maneira, assinalando-se os erros e explicando-se novamente, poderá ser útil para alguns alunos, se a explicação for suficiente para esclarecer algum tipo particular de dúvida, mas é bem provável que outros continuarão sem aprender e sem condições de reverter a situação (BRASIL, 2001, p. 59)

Desta forma, o professor poderá rever sua prática de ensino e planejar suas aulas sob uma perspectiva que leve a uma investigação dos erros para que os alunos compreendam a causa deles. Nessa concepção, o papel do professor ganha nova dimensão, atuando de modo mais eficaz e buscando novas maneiras de avaliar o aluno. Ainda nessa perspectiva, Pinto diz que:

> O erro, se observado com maior rigor, poderá oferecer novos elementos para o professor refletir sobre suas ações didáticas e, com isso, imprimir novos direcionamentos a suas práticas pedagógicas – o que certamente incidirá sobre seu desenvolvimento profissional (PINTO, 2000, p. 139).

Analisar os registros escritos dos alunos em questões de Matemática contribui para que o professor busque entender as respostas dadas e as estratégias utilizadas. Essa atitude investigativa permite ao professor detectar os conhecimentos que os alunos já possuem e quais ainda estão em construção.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), é importante que o professor inicie o trabalho com os conteúdos, valorizando e levando em conta a experiência acumulada pelo aluno dentro e fora da escola, bem como que os incentive a construírem seus próprios resultados.

2.3 Desenvolvimento

A escola escolhida para a investigação está localizada no agreste sergipano. Para aplicação dos questionários e análise das respostas dos alunos, utilizou-se uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental do turno matutino, composta por 18 alunos.

Os dados foram coletados por meio da aplicação de três questionários, os quais foram nomeados de Questionário1, Questionário 2 e Questionário 3, e uma Atividade de Análise dos Erros cometidos por eles na resolução do Questionário 1.

Tabela 1: Cronograma de Atividades

Atividade	Data	Objetivo
Aplicação do Questionário 1	12/09/2017	verificar o nível de aprendizado dos alunos nas operações com números racionais.
Atividade de Análise do Erro (AAE)	04/10/2017	verificar se os discentes identificavam os erros e acertos em cada item da questão.
Aplicação do Questionário 2	04/10/2017	verificar se após a explicação seriam revertidos os resultados encontrados no Questionário 1.
Aplicação do Questionário 3	08/11/2017	verificar se os estudantes conseguiram assimilar os conceitos trabalhados e ainda resolver a questão.

No momento da aplicação do Questionário 1, foi solicitado que os estudantes fizessem uma leitura das informações que estavam no cabeçalho. Além disso, foi informado que o objetivo era avaliar os seus conhecimentos sobre o assunto e que os mesmos seriam utilizados como objeto de pesquisa, possibilitando a análise dos seus erros, tendo como referência os teóricos que discutem o erro no processo de aprendizagem.

A análise dos dados dos questionários foi feita segundo as orientações de CURY (2004), separando as respostas em “correta”, “parcialmente correta” e “incorreta”. Apesar de a pesquisa estar focada nos erros cometidos, também foram observadas as respostas corretas para que fosse verificado o procedimento utilizado pelo aluno.

Após a correção do Questionário 1, buscou-se elaborar atividades que visassem oportunizar aos estudantes a conscientização e superação dos erros cometidos. Na sequência, os alunos foram avaliados e foi realizado o registro do novo desempenho.

Buscando preservar a identidade dos alunos, os instrumentos aplicados aos estudantes foram identificados com a letra A (Aluno), seguida de um número de ordem (1,2, 3,...). Dessa forma, os 18 alunos participantes da pesquisa foram identificados de A1 a A18, à medida que os seus protocolos iam sendo analisados, sem nenhum critério específico de ordenação; e os questionários com a letra Q (Questionário), seguida da identificação 1, 2 ou 3.

2.3.1 Descrição da aula de revisão

A aplicação do Questionário 1 ocorreu no dia 12 de setembro de 2017 e foram necessários dois horários para sua realização, ou seja, 1h40min. Ele era composto de uma questão subjetiva sobre valor numérico, envolvendo números racionais aplicados numa função afim, na qual se objetivava verificar o nível de aprendizado dos alunos nas operações com números racionais. Segue o Questionário 1.

Questionário 1

1) Considere a função:

$f(x) = 2x - \frac{1}{3}$, em que x é um número real, determine:

a) $f(1)$ b) $f(\frac{-1}{2})$

c) $f(\frac{2}{3})$ d) $f(\frac{5}{4})$

Após aplicação, foi feita a correção do questionário e observou-se que os estudantes tiveram maiores dificuldades nos itens que envolviam adição e subtração de frações com denominadores diferentes. Já na multiplicação de frações, a quantidade de erros foi menor. Nos próximos capítulos, tais erros serão detalhados.

Levando em conta os erros cometidos pelos estudantes e como eles podem proporcionar uma aprendizagem significativa, pode-se concluir que é possível fazer uma investigação mais aprofundada sobre os conhecimentos dos discentes para que seja possível inserir na prática docente a valorização do erro, possibilitando, assim, um diagnóstico de quais seriam seus déficits.

Após a identificação dos erros cometidos pelos alunos em cada item da questão, foi criada uma atividade denominada Atividade de Análise do Erro (AAE) com a seleção dos erros recorrentes dos alunos e a posterior exposição de tal seleção a eles. Ela foi realizada no dia 4 de outubro de 2017 e tinha por objetivo verificar se os discentes identificavam os erros e acertos em cada item da questão. Alguns alunos não entenderam, de imediato, a ideia proposta nessa atividade e, após alguma discussão, uma boa parte conseguiu entender.

Vale destacar que cada item da questão continha respostas certas ou erradas semelhantes às dadas pelos discentes na resolução do Questionário 1 para verificar se eles conseguiam identificar as respostas que estavam corretas e as que estavam incorretas e descrever ao lado de cada item os erros e acertos. Houve um bom envolvimento e, durante 45 min, os discentes analisaram e fizeram a atividade, sendo que alguns alunos não interagiram.

Foi explicado aos alunos que, num segundo momento, após o término da atividade, a questão seria discutida e as dúvidas seriam esclarecidas. Segue a AAE.

Atividade de Análise do Erro

1) Considere as respostas à questão: Seja $f(x) = 3x - \frac{2}{3}$. Encontre $f\left(\frac{5}{6}\right)$.

Identifique nas respostas se há algum erro.

a) $f\left(\frac{5}{6}\right) = 3.\frac{5}{6} - \frac{2}{3}$

$f\left(\frac{5}{6}\right) = 3.6 - \frac{2}{3}$

$f\left(\frac{5}{6}\right) = 18 - \frac{2}{3}$

$f\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{54-2}{3} = \frac{52}{3}$

b) $f\left(\frac{5}{6}\right) = 3.\frac{5}{6} - \frac{2}{3}$

$f\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{18.5}{6} - \frac{2}{3}$

$f\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{90}{6} - \frac{2}{3}$

$f\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{90-4}{6} = \frac{86}{6}$

c) $f\left(\frac{5}{6}\right) = 3.\frac{5}{6} - \frac{2}{3}$

$f\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{15}{6} - \frac{2}{3}$

$f\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{15-4}{6} = \frac{11}{6}$

d) $f\left(\frac{5}{6}\right) = 3.\frac{5}{6} - \frac{2}{3}$

$f\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{15}{6} - \frac{2}{3}$

$f\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{13}{9}$

e) $f\left(\frac{5}{6}\right) = 3.\frac{5}{6} - \frac{2}{3}$

$f\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{15}{18} - \frac{2}{3}$

$f\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{13}{15}$

Após a aplicação da AAE, ela foi recolhida e, em seguida, realizou-se uma discussão acerca dessa tarefa, anotando-se cada item por vez na lousa e discutindo-se com a turma a resposta, para que, através de um diálogo e explanação do conteúdo, fossem mostrados os erros cometidos pelos discentes e para que pudessem sanar as eventuais dúvidas. Apesar de ter sido explicada a importância das operações com frações em todos os anos de estudo, nem todos prestaram atenção à correção dos erros e, algumas vezes, era necessário parar a explicação para chamar a atenção dos alunos que estavam conversando sobre assuntos diferentes.

Durante a aula, percebeu-se que os alunos que erraram a questão pouco participaram e os que interagiram não conseguiam identificar os erros nos itens. Já os que acertaram, participaram de forma ativa e, além de identificar os erros, iam ao quadro fazer as devidas correções. Após a identificação das falhas, foi explicado todo o procedimento para resolver a questão.

Com relação à multiplicação de um número inteiro por uma fração, a maioria identificou os erros. Quanto à subtração de frações com denominadores diferentes, uma boa parte lembrava de calcular o mínimo múltiplo comum dos denominadores, mas não realizava o restante do processo para finalizar o exercício de maneira correta. Um aluno falou que, ao retirar o mínimo múltiplo comum, depois era só subtrair os numeradores. Outro disse que bastava subtrair os numeradores e os denominadores. Os discentes que identificaram os erros nas respostas iam ao quadro mostrar aos colegas o procedimento correto.

Um fato interessante ocorreu no item “b”. Uma aluna identificou que tinha um erro na multiplicação de um número inteiro por uma fração e explicou que bastava multiplicar o numerador pelo numerador e o denominador pelo denominador. O aluno que cometeu esse tipo de erro identificou-se e disse: “desse jeito é muito mais fácil”. Pediu-se a ele que explicasse qual foi o raciocínio que tinha usado para resolver tal item. O estudante disse que tinha calculado o mínimo múltiplo comum dos denominadores e, em seguida, dividiu-o pelo denominador e multiplicou o resultado pelo numerador nas duas frações, ou seja, ele utilizou a mesma técnica para somar frações com denominadores diferentes. Segundo Rosso e Berti (2010, p. 1014) a autonomia do aluno é favorecida quando seu erro pode ser corrigido em cooperação com os colegas e o professor e não apenas pela correção do docente.

Após a análise e correção de todos os itens da questão proposta, um aluno da turma comentou que assistiu a um vídeo na internet, que falava sobre o método da borboleta e pediu para ir ao quadro mostrar aos colegas. Os alunos que têm maior dificuldade em matemática gostaram da ideia. Alguns discentes perguntaram se havia outra forma de resolver subtração de frações com denominadores diferentes, então foi apresentada a resolução usando o princípio da equivalência.

Diante disso, ao discutir os erros com a turma, motivar e incentivar os alunos de maneira que eles pudessem explicar e dar sentido aos próprios erros, o professor pode criar conflitos necessários à reorganização dos conhecimentos dos estudantes.

Em seguida, foi solicitado que eles respondessem a um novo questionário, denominado Questionário 2, contendo questões que abordam a mesma temática do questionário anterior, com o intuito de verificar se após a explicação seriam revertidos os resultados encontrados no Questionário 1.

Questionário 2

1) Seja $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{5}$, encontre:

a) $f(2)$

b) $f(\frac{1}{2})$

c) $f(\frac{3}{5})$

d) $f(0{,}25)$

Nesse processo, utilizamos o erro como uma ferramenta da aprendizagem, onde pretende-se que o aluno, identificando o seu erro, sabendo como errou e como deveria ter feito, entende-o de forma significativa.

Após a análise das respostas do Questionário 2 veremos o andamento do aprendizado dos participantes da pesquisa.

CAPÍTULO 3: DISCUSSÃO DOS RESULTADOS DA PESQUISA SOB A PERSPECTIVA DA ANÁLISE DE ERROS

Neste capítulo, apresenta-se os resultados e discussões dos questionários sob a perspectiva da análise de erros, segundo Cury (1994), organizando os dados em tabelas e realizando a descrição e discussão dos erros cometidos pelos alunos.

Segundo Cury (1995), a forma de tratar os erros é de cada professor. Existem docentes que simplesmente encontram os erros, porém não os expõem aos alunos. Há outros que, a partir dos erros, retomam o conteúdo, fazendo com que o aluno perceba o que estava errado. Por fim, existem aqueles que questionam o estudante com o objetivo de entender qual o raciocínio empregado por ele para obter a resposta.

Nesse contexto, é essencial dar mais atenção aos erros cometidos pelos alunos, com o objetivo de alcançar um melhor desempenho na matemática.

3.1 Análise dos resultados

A análise das respostas dos alunos tem por objetivo trazer, tanto para o professor quanto para o aluno, a possibilidade de entender como acontece a construção do saber para cada discente e, também para verificar se foi útil para formação do seu conhecimento.

Além disso, a análise dos erros é importante para auxiliar a observar as causas que levaram o aluno a cometer o erro. De acordo com Cury, o erro não é somente efeito da ignorância, mas deve ser visto como uma forma de investigar o que levou o aluno a errar e como ele pensa, ou seja:

> Os erros cometidos pelos alunos são considerados estágios necessários à exploração de problemas e podem ser utilizados, pelo professor ou pelos próprios alunos, para novas descobertas e para discussão dos conceitos envolvidos em um determinado problema matemático. (CURY, 1994, p.132)

A análise de erros, assim como afirma Cury (2007, p. 13), deve ser empregada em sala de aula, pois, assim, a maioria dos alunos poderá questionar suas próprias opiniões, criando uma visão crítica sobre as coisas que o cercam.

Os dados coletados foram organizados em tabelas sob os seguintes critérios: respostas corretas (C), respostas incorretas (I) e respostas em branco (EB).

A seguir, serão explicados os critérios utilizados para classificar as respostas dos discentes nas categorias citadas anteriormente:

- Corretas: são as respostas nas quais os alunos conseguiram utilizar os conhecimentos matemáticos adequados e chegaram ao resultado esperado da questão.
- Incorretas: são respostas que continham raciocínios inapropriados ou propriedades inadequadas, não conseguindo chegar ao resultado.
- Em branco: são as questões não respondidas pelos alunos, ou quando escrevem expressões do tipo “não sei”, “não entendi”.

Foram aplicados três questionários, que foram denotados por Q1, Q2 e Q3, respectivamente, e uma Atividade de Análise do Erro (AAE).

3.1.1 Análise do Questionário 1

O Questionário 1 é composto por uma questão com quatro itens, que tem por finalidade calcular o valor numérico de uma função afim, envolvendo números racionais com o objetivo de verificar o nível de aprendizado dos alunos nas operações com números racionais, conforme a seguir:

1) Considere a função:

$f(x) = 2x - \frac{1}{3}$, em que x é um número real, determine:

a) $f(1)$ b) $f(\frac{-1}{2})$ c) $f\left(\frac{2}{3}\right)$ d) $f\left(\frac{5}{4}\right)$

Apresenta-se a seguir o rendimento dos 18 alunos no Questionário 1, com dados das quantidades de respostas corretas, parcialmente corretas, incorretas e em branco presentes no acervo da pesquisa, conforme a tabela a seguir:

Tabela 2: Desempenho dos Alunos no Q1

Questão	Correta		Incorreta		Em Branco		Total	
	F	%	F	%	F	%	F	%
1.a	8	44%	9	50%	1	6%	18	100%
1.b	4	22%	11	61%	3	17%	18	100%
1.c	9	50%	8	44%	1	6%	18	100%
1.d	5	28%	11	61%	2	11%	18	100%

Legenda: Frequência (F) Porcentagem (%).
Fonte: Acervo da pesquisa

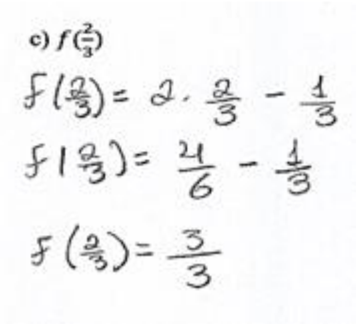
Observando-se os resultados da Tabela 2, percebe-se que a turma do nono ano do Ensino Fundamental teve um desempenho baixo, pois o número de respostas corretas foi pequeno em todos os itens da questão. O pior desempenho foi no item 1.b, o que mostra que há alunos do final do Ensino Fundamental sem conhecimento de conteúdos que irão precisar no Ensino Médio e Superior.

Apresentam-se a seguir os erros cometidos pelos estudantes no Questionário 1, os quais passamos a discutir com maiores detalhes.

Erro E1.1 – Realizou subtração de numerador com numerador e denominador com denominador.

Nas respostas dos estudantes A11 e A16, observa-se que ao resolver a subtração de frações eles diminuem numerador com numerador e denominador com denominador. Os alunos não utilizam o cálculo do mínimo múltiplo comum nem fazem o uso das frações equivalentes. Para exemplificar, segue a resolução do aluno A11.

Figura 1: Resposta do aluno A11

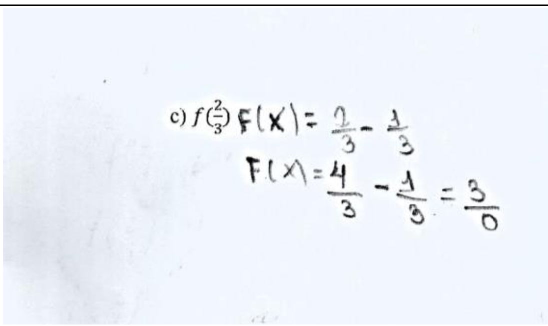


Fonte: Acervo da pesquisa

Percebe-se também que o aluno comete o erro E1.4 ao multiplicar o numerador e o denominador da fração pelo número inteiro.

Na solução do aluno A16, no item c), além de mostrar não ter habilidades ao subtrair frações com denominadores iguais, pode-se identificar a má formação do conceito de fração, visto que ele não percebeu que não há divisão por zero. Segue exemplar do aluno A16.

Figura 2: Resposta do aluno A16

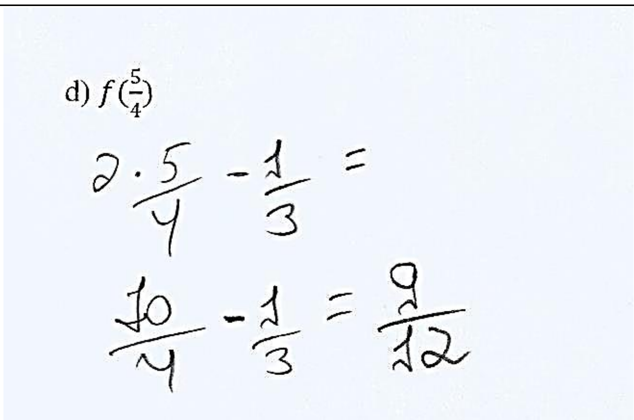


Fonte: Acervo da pesquisa

Erro E1.2 – Na subtração de frações com denominadores diferentes efetua o mínimo múltiplo comum e não realiza os cálculos corretamente.

Os estudantes A8 e A14 entendem que um dos procedimentos para resolver uma subtração de frações com denominadores diferentes é trabalhar com o mínimo múltiplo comum entre os denominadores. Contudo, apresentam dificuldade em parte do algoritmo e não efetuam as demais etapas corretamente, realizando apenas a subtração do numerador com o outro numerador. Eles evidenciam não ter compreendido a Definição 1.12 do Capítulo 1. Como exemplar, segue a resolução do aluno A8.

Figura 3: Resposta do aluno A8

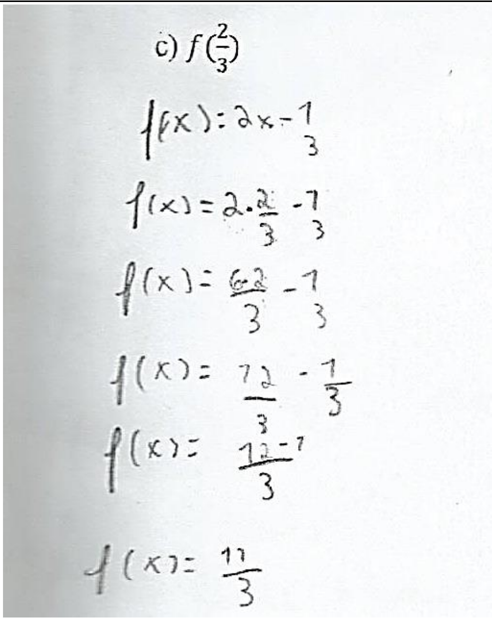


Fonte: Acervo da pesquisa

Erro E1.3 – Utiliza as regras para somar frações com denominadores diferentes na multiplicação.

Na resposta do aluno A7, observa-se que, ao tentar multiplicar um número inteiro por uma fração, utiliza técnicas de resolução de adição de frações com denominadores distintos, deixando claro que não domina o processo de resolução de multiplicação de frações, como vemos na resolução do estudante A7.

Figura 4: Resposta do aluno A7

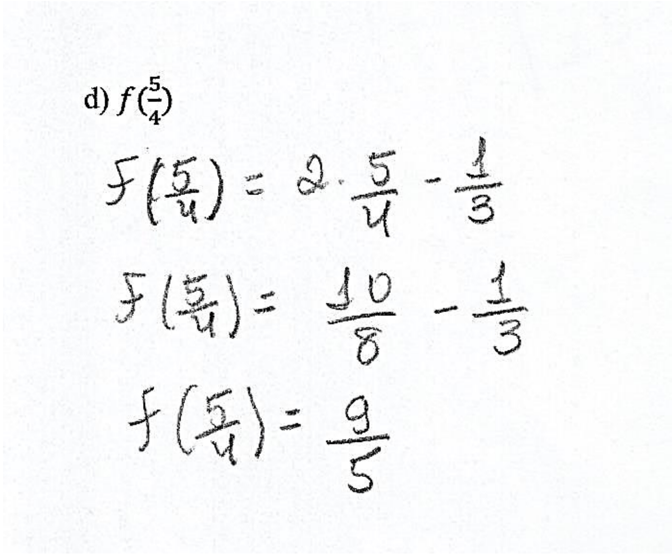


Fonte: Acervo da pesquisa

Erro E1.4 – Multiplica o número inteiro pelo numerador e pelo denominador da fração.

No produto de um número inteiro por uma fração, os discentes A11 e A14 cometeram o erro de multiplicar o número inteiro tanto pelo numerador quanto pelo denominador. Esse fato mostra que os estudantes não compreendem que todo número inteiro é uma fração de denominador 1, e essa falha na compreensão do conceito de fração o faz considerar o número inteiro como numerador e denominador da fração que o representa. Como exemplar, segue a resolução do aluno A11.

Figura 5: Resposta do aluno A11



Fonte: Acervo da pesquisa

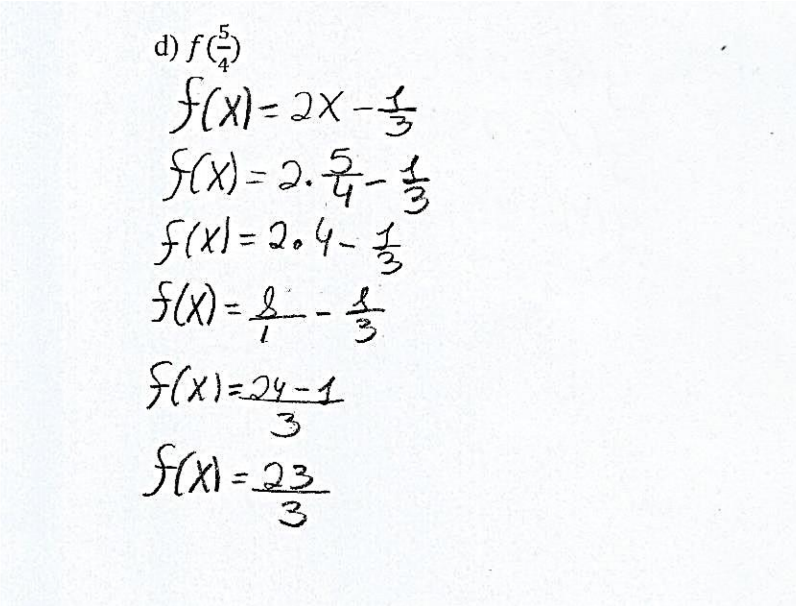
Os erros encontrados ao subtrair frações, a saber, os estudantes subtraem numerador com numerador e denominador com denominador, como também efetuam o mínimo múltiplo comum e não realiza os cálculos corretamente e ao multiplicar um número inteiro por uma fração em que os alunos multiplicam o número inteiro pelo numerador e denominador da fração também foram encontrados por Oliveira (2017).

Os erros encontrados ao subtrair frações, a saber, os estudantes subtraem numerador com numerador e denominador com denominador e na multiplicação de um número inteiro por uma fração em que os alunos multiplicam o número inteiro pelo numerador e denominador da fração também foram encontrados por Barreto (2017).

Erro E1.5 - Realizou a multiplicação de um número inteiro por uma fração desconsiderando o numerador.

Ao determinar o produto de um número inteiro por uma fração, o estudante A10 procede da seguinte forma: multiplica o número natural pelo denominador da fração e despreza o numerador. Segue a solução do aluno A10.

Figura 6: Resposta do aluno A10

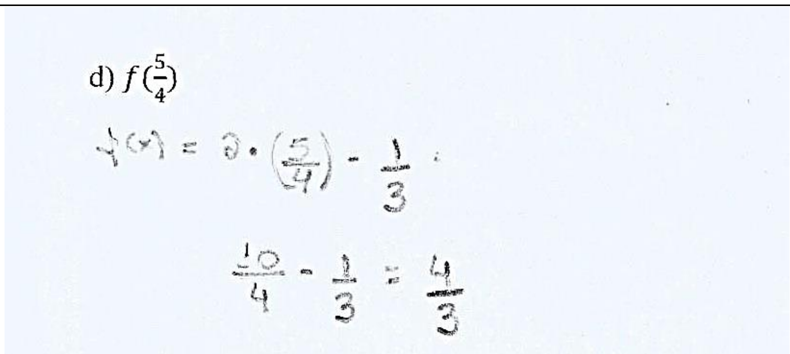


Fonte: Acervo da pesquisa

Erro E1.6 - Realizou erros de difícil compreensão.

Ao resolver a subtração de frações com denominadores diferentes, percebe-se que os estudantes A2, A5, A6, A9, A12 e A15 não compreenderam a técnica utilizada para resolver tal operação, escrevendo um resultado qualquer. Sendo assim, não se conseguiu identificar como eles chegaram ao resultado quatro terços. Como exemplar, segue a resolução do aluno A2.

Figura 7: Resposta do aluno A2



Fonte: Acervo da pesquisa

3.1.2 Análise do Questionário 2

Semelhante ao Questionário 1, o Questionário 2 esteve composto por uma questão com quatro itens, conforme a seguir:

1) Seja $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{5}$, encontre:

a) $f(2)$ b) $f(\frac{1}{2})$ c) $f(\frac{3}{5})$ d) $f(0{,}25)$

O rendimento dos alunos nesse questionário foi conforme a tabela a seguir:

Tabela 3: Desempenho dos Alunos no Q2

Questão	Correta		Incorreta		Em Branco		Total	
	F	%	F	%	F	%	F	%
1.a	9	50%	7	39%	2	11%	18	100%
1.b	10	56%	6	33%	2	11%	18	100%
1.c	9	50%	7	39%	2	11%	18	100%
1.d	3	17%	8	44%	7	39%	18	100%

Legenda: Frequência (F) Porcentagem (%).
Fonte: Acervo da pesquisa

De acordo com os dados dispostos na Tabela 3, nota-se que o número de respostas corretas em sua maioria foi superior ao número de respostas incorretas, e isso indica que os alunos entenderam melhor os procedimentos utilizados para resolver a questão proposta. O item “1.d” é o único que usa número decimal. Nesse item eles tiveram mais dificuldade, apontando que a relação da fração com o número decimal precisa ser mais trabalhada, já que os alunos não conseguem expressar um número decimal em forma de fração.

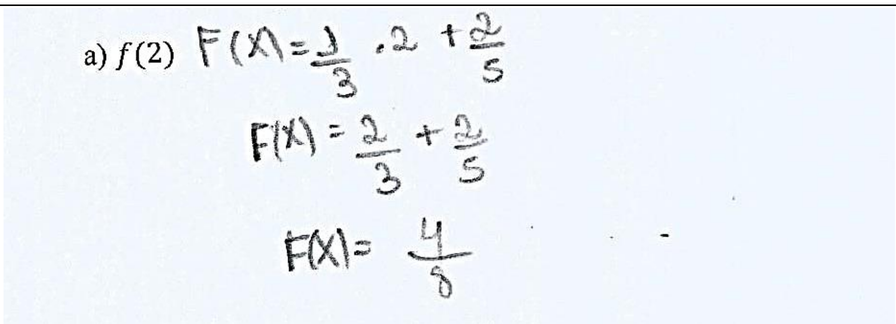
Apresenta-se a seguir os erros cometidos pelos estudantes no Questionário 2, os mesmos serão discutidos com maiores detalhes posteriormente.

A seguir, será feita a análise das respostas ao Questionário aplicado na mesma turma do nono ano do Ensino Fundamental. Um dado importante é que os alunos não cometeram nenhum erro ao multiplicar frações.

Erro 2.1 - Realizou soma de numerador com numerador e denominador com denominador.

Ao somar frações com denominadores diferentes, os alunos A5, A6, A14 e A16 cometeram o mesmo tipo de erro, somando numerador com numerador e denominador com denominador. Ou seja, eles evidenciam não ter compreendido a Definição 1.12 do Capítulo 1. As respostas revelam que esses estudantes não compreenderam que, para efetuar a adição de frações com tais denominadores, faz-se necessário o cálculo do mínimo múltiplo comum ou o uso de frações equivalentes, mostrando não terem domínio do assunto trabalhado na questão. Como exemplar, segue a resolução do aluno A16.

Figura 8: Resposta do aluno A16

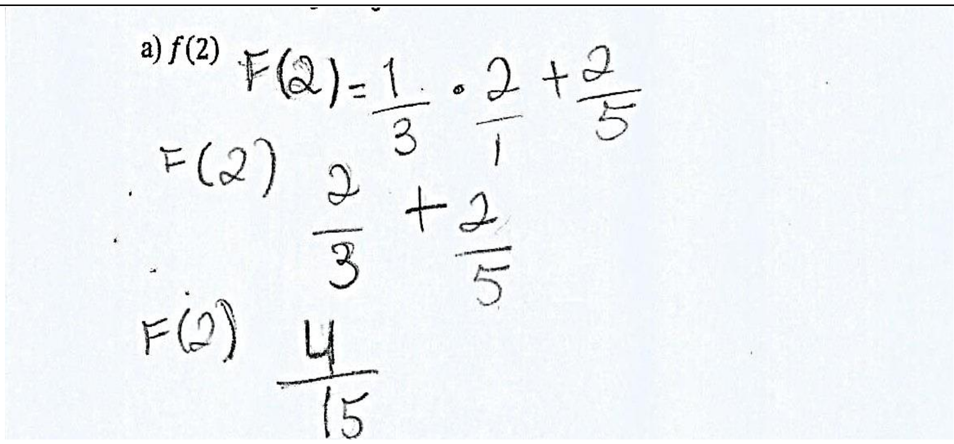


Fonte: Acervo da pesquisa

Erro 2.2 - Na adição de frações com denominadores diferentes efetua o mínimo múltiplo comum e não realiza os cálculos corretamente.

Nessa solução percebe-se que os alunos A9 e A15, ao resolverem a adição de frações com denominadores distintos, efetuam o cálculo do mínimo múltiplo comum corretamente. Porém, não conseguem fazer os demais cálculos para chegar ao resultado desejado. Constata-se mais uma vez falta de domínio do conteúdo trabalhado na questão. Segue resposta do aluno A9.

Figura 9: Resposta do aluno A9



Fonte: Acervo da pesquisa

3.1.3 Análise do Questionário 3

O Questionário 3 também é composto por uma questão com quatro itens, conforme a seguir.

1) Seja $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$, calcule:

a) $f(2)$ b) $f(\frac{1}{2})$ c) $f(\frac{2}{3})$ d) $f(0{,}02)$

Apresentamos na Tabela 4 os resultados de desempenho de 18 estudantes na resolução do Questionário 3, envolvendo as operações com frações.

Tabela 4: Desempenho dos Alunos no Q3

Questão	Correta		Incorreta		Em Branco		Total	
	F	%	F	%	F	%	F	%
1.a	4	22%	14	78%	0	0%	18	100%
1.b	3	17%	14	78%	1	5%	18	100%
1.c	5	28%	12	67%	1	5%	18	100%
1.d	3	17%	11	61%	4	22%	18	100%

Legenda: Frequência (F) Porcentagem (%).
Fonte: Acervo da pesquisa

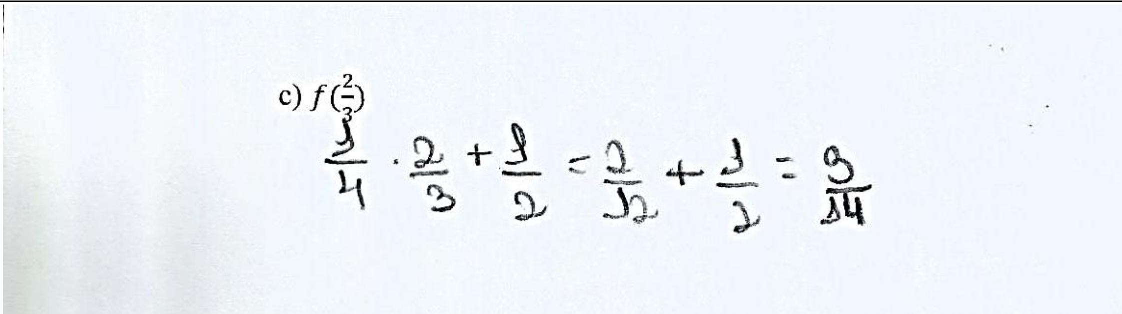
Observa-se nos dados da Tabela 4 que a turma teve um desempenho baixo, pois o número de respostas corretas foi muito pequeno em todos os itens propostos. Nota-se também que a Tabela 4 mostra um retrocesso no número de soluções corretas comparado aos questionários anteriores, como pode ser observado na Tabela 2 e na Tabela 3. Portanto, percebe-se que os alunos não conhecem as principais regras para resolver as operações com frações, ou então que eles não conseguem expressá-las corretamente.

Apresentam-se a seguir os erros cometidos pelos estudantes no Questionário 3.

Erro 3.1 – Realizou soma de numerador com numerador e denominador com denominador.

Constata-se que o aluno A16 não tem domínio do procedimento usado para efetuar soma de frações com denominadores distintos. Nessa questão, ele omite o cálculo do mínimo múltiplo comum, fazendo a soma do numerador com numerador e do denominador com denominador. Como mostra sua solução a seguir.

Figura 10: Resposta do aluno A16

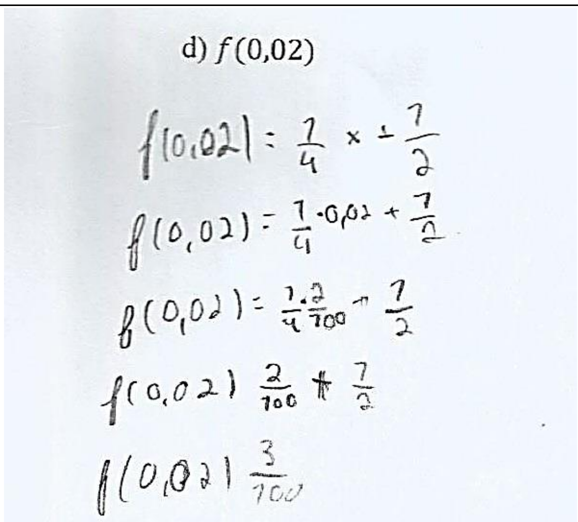


Fonte: Acervo da pesquisa

Erro 3.2 – Na adição de frações com denominadores diferentes efetua o mínimo múltiplo comum e não realiza os cálculos corretamente.

Na análise das respostas dos discentes A7, A8, A11, A14 e A15, eles compreendem que uma das formas de resolver a adição de frações com denominadores diferentes é determinando o mínimo múltiplo comum entre os denominadores. Contudo, apresentam dificuldade em parte do algoritmo e não efetuam as demais etapas corretamente. Isso demonstra aspectos negativos na aprendizagem das operações com frações por parte desses estudantes. Exemplificamos esse tipo de erro com a solução do aluno A7, que segue.

Figura 11: Resposta do aluno A7



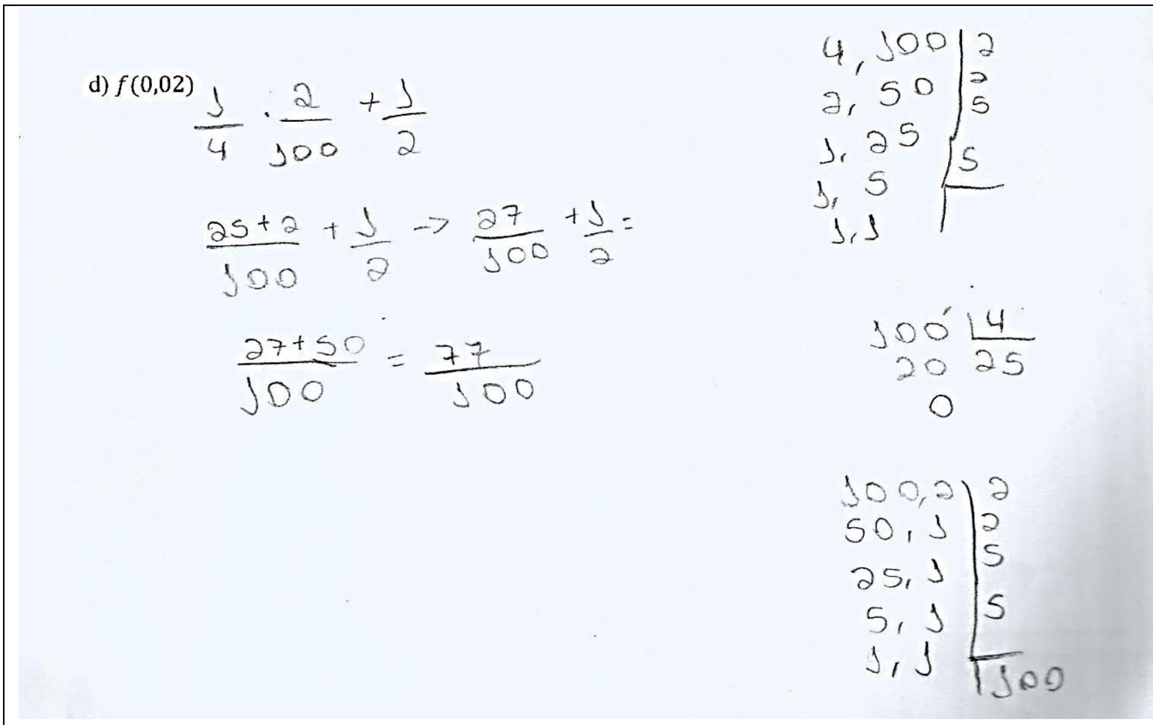
Fonte: Acervo da pesquisa

51

Erro 3.3 – Considera as operações envolvidas como sendo todas adições de frações com denominadores diferentes.

Na análise das soluções dos alunos A13 e A18, nota-se que eles compreenderam como somar frações com denominadores distintos. No entanto, ao efetuar a multiplicação, é possível que eles, ao resolverem essa operação, tenham confundido com a soma. Esse fato pode ter ocorrido por sua falta de atenção, pois, nos questionários anteriores, eles mostraram domínio na solução desse tipo de exercício. Segue resposta do aluno A18.

Figura 12: Resposta do aluno A18

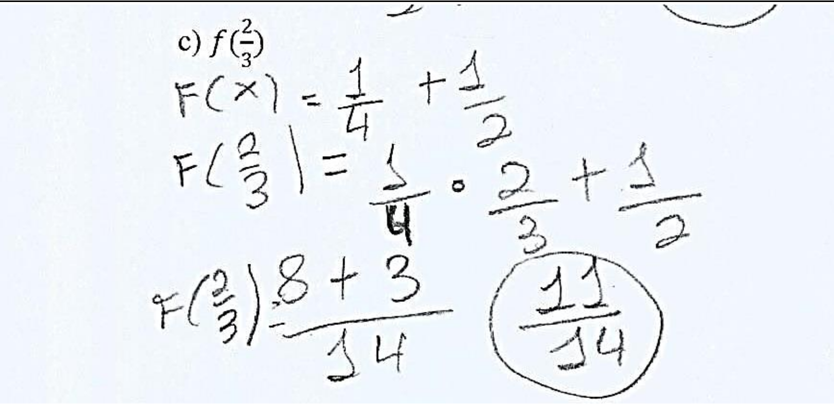


Fonte: Acervo da pesquisa

Erro 3. 4 – Erros de difícil compreensão.

Na análise das respostas dos discentes A2, A3, A5, A6 e A9, é possível perceber que os estudantes não conhecem as principais definições para resolver situações que envolvam as operações com frações, escrevendo um resultado de difícil interpretação. Como podemos observar na solução do aluno A9.

Figura 13: Resposta do aluno A9



Fonte: Acervo da pesquisa

Mediante os resultados encontrados nestes protocolos, percebe-se que a maioria dos estudantes tem dificuldades ao resolver questões envolvendo as operações com frações. Esse fato, leva-nos a refletir sobre a maneira de abordar esse conteúdo nas aulas para que os alunos não concluam o Ensino Fundamental com essas deficiências.

CAPÍTULO 4: COMPARAÇÃO DO RENDIMENTO DE CADA ALUNO NOS TRÊS QUESTIONÁRIOS

No capítulo anterior, foram listados e comentados todos os erros cometidos pelos alunos nos três questionários aplicados numa turma do 9º ano do Ensino Fundamental.

Vale a pena lembrar que cada questionário continha uma questão subjetiva sobre o valor numérico de uma função afim envolvendo números racionais, que tinha como objetivo verificar o nível de aprendizado dos alunos nas operações com números racionais.

Neste capítulo, será feita uma análise comparativa do rendimento de cada aluno nos três questionários e se observará se, após a aplicação da atividade de Análise dos Erros cometidos na resolução do Questionário 1, eles conseguem melhorar o desempenho nos próximos questionários.

Para melhor visualização e análise do desempenho dos alunos nos três questionários, julgou-se necessário fazer uma tabela do desempenho dos estudantes, conforme a seguir.

Tabela 5: Desempenho dos alunos nos três questionários

Situação nos Q1, Q2 e Q3	A/A/A	E/E/E	E/A/E	A/A/E	E/A/A
Alunos	A1, A4 e A17	A2, A3, A5, A6, A9, A14, A15 e A16	A7, A8 e A11	A13 e A18	A10 e A12

Legenda:
A/A/A = Acertou os três questionários;
E/E/E = Errou nos três questionários;
E/A/E = Errou nos questionários 1 e 3 e acertou o segundo questionário;
E/A/A = Errou no questionário 1 e acertou os questionários 2 e 3.
Fonte: Acervo da pesquisa

Levando-se em consideração a Tabela 5, nota-se que três alunos, a saber, A1, A4 e A17 demonstram ter habilidades ao resolver questões que envolvem as operações com frações, obtendo um excelente resultado nos três questionários aplicados.

Além disso, destacam-se também os alunos A2, A3, A5, A6, A9, A14, A15 e A16. Esses estudantes não conseguiram resolver nenhum dos itens propostos no primeiro questionário e, mesmo após a realização da Atividade de análise do erro, eles mantiveram péssimos resultados nos questionários seguintes. A seguir, alguns comentários das soluções de dois desses discentes.

Analisando as soluções do aluno A9 no Questionário 1, nota-se que ele não compreende como resolver as operações com frações e o desenvolvimento realizado é de difícil compreensão. Após feita a Atividade de Análise do Erro em sala de aula, e, depois da aplicação do Questionário 2, percebe-se que esse aluno efetua as operações que envolvem a multiplicação de frações corretamente. No entanto, com relação à soma de frações nota-se que ele calcula o mínimo múltiplo comum corretamente e não realiza as regras necessárias para chegar ao resultado. Observa-se no Questionário 3 que o estudante não avança na resolução, pois apresenta respostas cujo raciocínio utilizado não foi possível identificar.

Verificando as respostas do aluno A14, no Questionário 1, percebe-se que na multiplicação de um número inteiro por uma fração ele multiplica o número natural tanto pelo numerador quanto pelo denominador. Já com relação a subtração de frações com denominadores diferentes, observa-se que o estudante determina o mínimo múltiplo comum corretamente e realiza a subtração de um numerador com o outro, mostrando que não tem conhecimento para resolver questões envolvendo tais operações. Após feita a Atividade de Análise do Erro em sala de aula e a aplicação do Questionário 2, nota-se que ele efetua as operações que envolvem a multiplicação de frações corretamente. No entanto, com relação à adição, ele soma numerador com numerador e denominador com denominador. Observa-se no Questionário 3 que o estudante resolve corretamente a multiplicação, mas na soma comete o mesmo erro do primeiro questionário.

Observa-se também que os alunos A7, A8 e A11 não tiveram um bom desempenho no primeiro questionário e, com a atividade realizada, conseguiram melhorar no segundo, mas no terceiro questionário não tiveram um bom desempenho, o que mostra que, após um mês da Atividade de Análise do Erro, eles esqueceram como resolver tais operações.

Verificando as respostas do aluno A7, no Questionário 1, nota-se que, ao multiplicar um número inteiro por uma fração, ele utiliza as mesmas regras utilizadas para adição de frações com denominadores distintos, deixando claro que não domina o processo de resolução de multiplicação de frações. Com relação à subtração de frações com denominadores distintos, ele utiliza as regras corretamente. Após a aplicação da Atividade de Análise do Erro cometidos por eles na resolução do Questionário 1, o discente teve um excelente desempenho ao resolver as questões propostas no Questionário 2 e, apenas no item “d”, cometeu um erro de cálculo. Já no Questionário 3, percebe-se que o estudante assimilou as técnicas de multiplicação, porém, ao realizar a soma de tais frações, ele acabou errando, a saber, determinando corretamente o mínimo múltiplo comum e não utilizando as regras necessárias para chegar ao resultado. Esse fato pode ter ocorrido por falta de atenção do discente, já que nos questionários anteriores ele demonstrou conhecimento na resolução desse tipo de operação.

Outro dado que chama atenção na Tabela 5 refere-se aos estudantes A13 e A18, os quais obtiveram um excelente desempenho ao resolver as questões propostas tanto no Questionário 1 quanto no Questionário 2, acertando todos os itens. Já no Questionário 3, percebe-se que os estudantes lembram as técnicas para efetuar a adição de frações com denominadores diferentes, mas, ao multiplicar frações, usam o mesmo procedimento utilizado para resolver adição de frações com denominadores distintos. Esse fato pode ter ocorrido por sua falta de atenção já que eles demonstraram habilidade na resolução desse tipo de operação nos questionários anteriores.

Verifica-se ainda que os alunos A10 e A12 conseguiram, de alguma forma, melhorar seu desempenho com a atividade realizada, tendo em vista que mantiveram bons resultados no segundo e no terceiro questionário, este aplicado um mês após a Atividade de Análise do Erro. Esses discentes mostram que assimilaram o processo utilizado para efetuar as operações com frações.

É importante salientar que, após a atividade realizada, todos os alunos entenderam o processo para resolver corretamente a multiplicação de um número inteiro por uma fração no segundo questionário, enquanto no terceiro 14 alunos acertaram e 4 resolveram de forma incorreta.

Finaliza-se essa discussão frisando a importância de se trabalhar os erros cometidos pelos alunos em sala de aula. Neste trabalho, a análise de erros foi utilizada como metodologia de ensino para destacar os principais erros cometidos pelos alunos participantes ao operar com frações, seguindo o pensamento de Brownell (1942 apud KRULIK, 1987, p. 66). “Em vez de ser protegida contra o erro, a criança deverá ser exposta ao erro muitas vezes, ser encorajada a detectar e a demonstrar o que está errado, e por quê”

CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi feita uma sondagem dos principais erros nas operações com frações, cometidos pelos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental numa escola regular da Rede Pública Estadual do estado de Sergipe, com o objetivo de analisar a aplicação dos números racionais numa atividade que aborda função afim, para verificar se os discentes conseguem realizar corretamente as operações com números racionais. A pesquisa realizada permitiu perceber se houve alguma evolução dos alunos na compreensão de cada conceito trabalhado.

A pesquisa foi desenvolvida com a aplicação de três questionários, os quais abordavam uma questão envolvendo o conteúdo de frações e uma Atividade de Análise dos Erros cometidos pelos alunos no Questionário 1. Nos três questionários, foram utilizadas as ideias e concepções sobre a utilização do erro como ferramenta e superação das dificuldades dos alunos, abordando a análise de erros de Cury (1994).

Na análise de dados, os erros mais frequentes na resolução de exercícios envolvendo as operações com frações referem-se à adição de frações com denominadores diferentes, a saber, os estudantes somam numerador com numerador e denominador com denominador, como também efetuam o mínimo múltiplo comum e não realizam os cálculos corretamente. Outro erro que aparece com frequência ocorre na multiplicação de um número inteiro por uma fração em que os alunos multiplicam o número inteiro pelo numerador e denominador.

Por meio do desenvolvimento do trabalho, percebeu-se que a produção escrita dos alunos, ao responderem a questão proposta, tem muito a ser explorada, pois, ao conduzir a análise de erros como metodologia de ensino e destinar uma atenção especial às respostas dos discentes, foi possível fazer a retomada do conteúdo por meio de outras atividades, além de permitir um olhar diferenciado para a aprendizagem e para o ensino, tanto para o professor quanto para o aluno.

Acredita-se que esse procedimento dará ao aluno uma visão diferenciada com relação a sua solução, uma vez que ele buscará compreender o fato que o levou a cometer tal erro. Em compensação, quando o professor der importância à resposta errada do aluno e elaborar em sala de aula atividades que busquem explorar e aproveitar os erros dos estudantes como ferramenta para aprendizagem, terá a possibilidade de descobrir em que ponto deve dar maior atenção durante as aulas para tentar sanar o erro exposto e melhorar o aprendizado dos alunos.

Além disso, tal metodologia requer que o professor procure novos caminhos que o ajudem a melhorar sua prática pedagógica, mudando costumes e práticas. Sendo assim, é urgente que a avaliação seja entendida como meio de compreender melhor o processo de ensino aprendizagem e, para tal, a análise de erros na produção escrita dos alunos mostrou ser uma ferramenta favorável para esse acontecimento.

Observando a produção escrita dos alunos na resolução de exercícios envolvendo as operações com frações e na análise dos erros cometidos por eles no Questionário 1, pode-se perceber que apenas os estudantes que tiveram um bom desempenho ao resolver a questão proposta no primeiro questionário conseguiram destacar os erros nas respostas da Atividade de Análise do Erro.

Após análise detalhada dos resultados apresentados pelos estudantes na revisão do Questionário 1, percebe-se que 5 alunos, a saber A7, A8, A10, A11 e A12, conseguiram melhorar de alguma forma com a atividade realizada no questionário seguinte. Além disso, os dados mostram que os alunos A10 e A12 mantiveram bons resultados no terceiro questionário um mês depois da Atividade de Análise do Erro. Vale lembrar sobre o avanço dos estudantes na realização da multiplicação de um número inteiro por uma fração nos questionários seguintes, tendo em vista que nos questionários 2 e 3 nenhum deles cometeu erros na multiplicação.

Nesse sentido, acredita-se que o ideal é trabalhar com a metodologia de análise de erros durante muitos encontros, talvez sempre. Mesmo trabalhando com apenas uma aula, alguns alunos mostraram bom resultado e houve momentos substanciais para o aperfeiçoamento do professor e a contribuição positiva na interação professor-aluno. Sendo assim, é fundamental a realização deste trabalho em mais momentos, procurando incentivar o aluno que errou a participar mais, pois isso poderia tê-lo ajudado a entender melhor o que fez de errado para não errar novamente.

Diante dos resultados encontrados na pesquisa, acredita-se que um trabalho contínuo com o uso da análise de erros como metodologia de ensino trará imensas vantagens para o aprendizado dos alunos, construindo e reconstruindo seus conhecimentos.

Sendo assim, os erros podem ser considerados uma ferramenta essencial para ajudar professores e alunos em sua caminhada na busca de uma aprendizagem centrada em elevar o grau de conhecimento dos educandos e identificar problemas de acordo com o nível dos estudantes e as séries envolvidas. Quando os erros são explorados, podem ser superados, pois erros e acertos fazem parte do processo de ensino e aprendizagem. Além disso, o estudo da análise dos erros permite compreender o processo cognitivo dos alunos e ajudá-los a construir novos conhecimentos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARRETO, J. R. **“Análise de erros cometidos por alunos do 6º ano na resolução de problemas envolvendo operações com frações”.** Dissertação de Mestrado Universidade Federal de Sergipe, 2007.

BORASI, R. **Reconceiving mathematics Instruction**: a Focus on Erros. Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation, 1996.

BRASIL, Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (Matemática). Brasília: A Secretaria, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (1ª a 4ª séries).** Brasília: MEC, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Matemática**:** ensino de primeira à quarta série. 3ª ed. Brasília, 2001.

BURIASCO, R. L. C. d. Cyrino, márcia cristina de costa trindade; soares maria tereza carneiro. **Manual para correção das provas com questões abertas de Matemática**, 2004.

COSTA, D. A. F**. A análise do Erro como caminho de Descoberta do Pensamento da Criança, AMAE Educando**. v. 21, n. 199, p. 14-20, out. 1998.

CURY, H. N. **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

CURY, H. N. **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos**. 1ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

CURY, H. N. **Retrospectiva história e perspectivas atuais da análise de erros em educação matemática**. Zetetiké, v.3, n.4, p.39-50, nov. 1995.

CURY, H. N. **As concepções de Matemática dos professores e sua forma de considerar o erro dos alunos.** Porto Alegre, Tese de Doutorado na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1994.

DANTE, L. R. **Matemática Contexto& Aplicações**. 3ª. ed. São Paulo: Ática, 2017.

D’ AMBROSIO, U. **Educação Matemática: Da Teoria à Prática**. Campinas, SP: Papirus Editora, 22ª Edição, 2012.

HEFEZ, A. *Aritmética.* Rio de Janeiro: SBM, 2014. (Coleção PROFMAT).

IEZZI, G et al. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 3ª. ed. São Paulo: Atual 1997.

OLIVEIRA, L. C. G. **“Análise de erros cometidos pelos discentes do sétimo ano do Ensino Fundamental e primeiro ano do Ensino Médio no estudo dos**

números racionais na sua forma fracionaria”. Dissertação de Mestrado Universidade Federal de Sergipe, 2007.

PERRENOUD, P.; PAQUAY, L.; ALTET, M.; CHARLIER, É.; (Org) trad. Fátima Murad e Eunice Gruman – **Formando professores profissionais-Quais estratégias? Quais competências?** 2ª ed. Ver. Porto Alegre: Artmed Editora, 2000.

PINTO, N. B. **O erro como estratégia didática: Estudo do erro no ensino de matemática elementar.** Campinas, SP: Papirus, 2000. (Série prática Pedagógica).

ROSSO, A. J.; BERTI, N.M**. O erro e o ensino–aprendizagem de matemática na perspectiva do desenvolvimento da autonomia do aluno.** Revista Bolema, n 37, v. 23, p. 1005 – 1035, 2010.

SILVA, M. C. N.; BURIASCO, R. L. C. **Produção escrita em matemática**: algumas reflexões. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 3., 2006, Águas de Lindóia. Anais... São Paulo: SBEM, 2006. 1 CD-ROM.

TOLEDO, M.; TOLEDO, M. **Didática da Matemática: como dois e dois: a construção da matemática.** São Paulo: FTD, 1996.